Wasserwirtschaftliche Planungsmethoden

6. Optimierungsverfahren

o.Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr. H.P. Nachtnebel
Institut für Wasserwirtschaft, Hydrologie und konstruktiver Wasserbau

Optimierungsverfahren

Grundsätzlich zwischen Optimierungsverfahren mit

- einer oder
- mehreren Variablen

unterschieden

Weiters kann optimierende Funktion

- linear
- nicht – linear

sein

Lineare Optimierung

die Zielfunktion und die Restriktionen sind linear

Zielfunktion $Z = a + b \cdot x_1 + c \cdot x_2 \Rightarrow \max$ $x_{1,2}$...Entscheidungsvariable

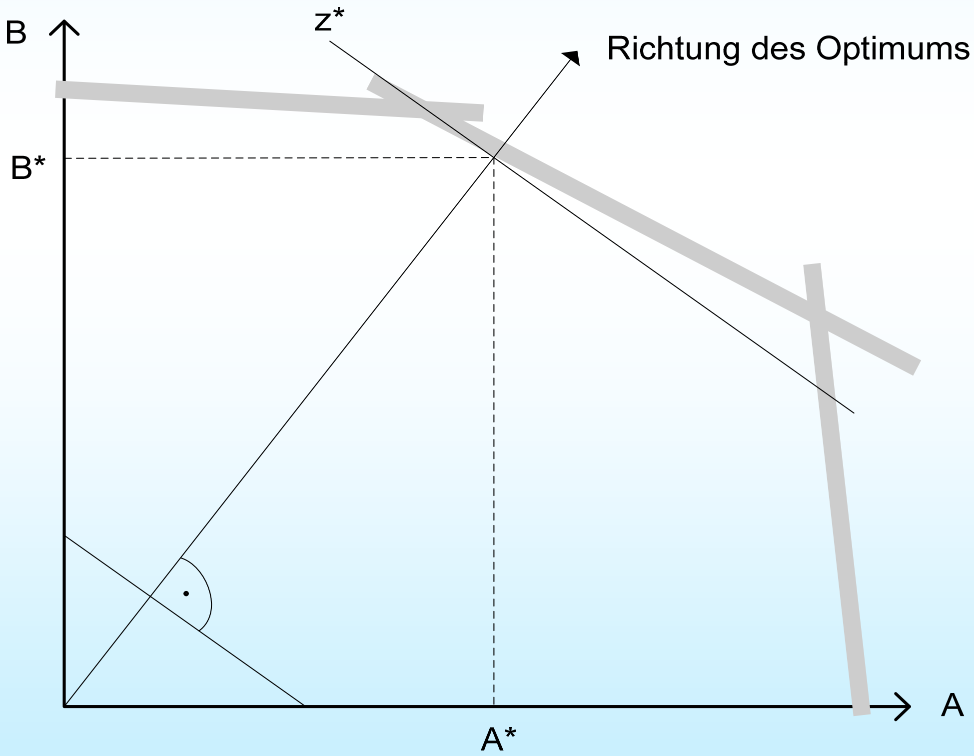
Restriktionen

(Beispiele)

$$x_1 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$d \cdot x_1 + e \cdot x_2 \leq f$$



Lineare Optimierung

Beispiel

3 Verfahren, um ein Produkt herzustellen, wobei verschiedene Ressourcen benötigt werden

	Verfahren 1	Verfahren 2	Verfahren 3	Verfügbare
Elektroenergie	2	3	4	115
Wasser	5	2	3	150

Ziel $\sum x_i \Rightarrow \max$

Restriktionen

Energieverbrauch $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \leq 115$

Wasserverbrauch $5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 150$

$x_i \geq 0$

Um eindeutige Lösung zu finden muss Entscheidungsbereich konvex sein

Nicht lineare Optimierung

Quadratische Optimierung

Zielfunktion $$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \Rightarrow \min$$

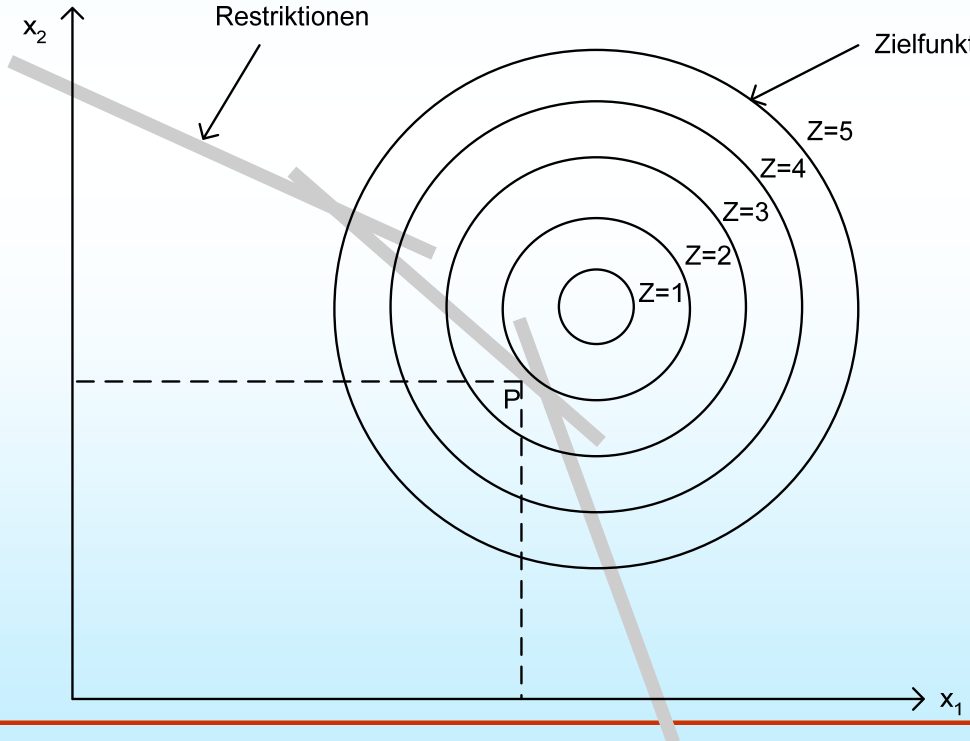
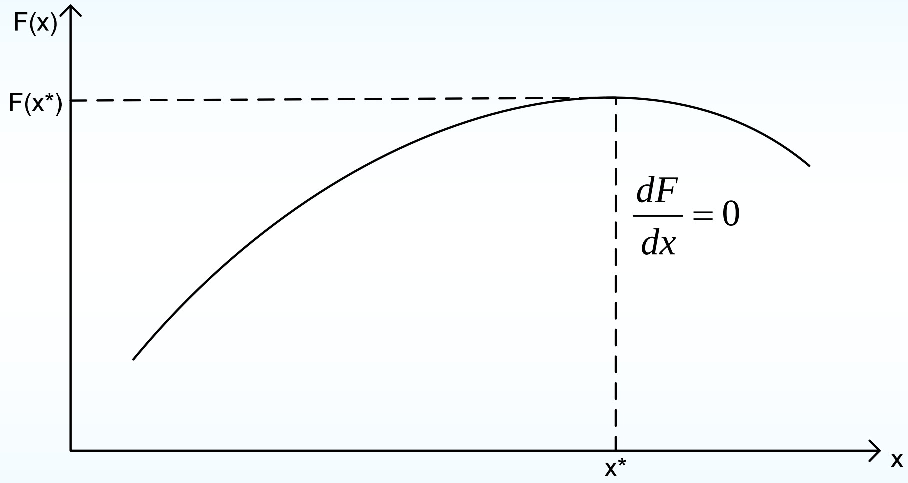


Abb.:quadratische Optimierung graphisch

Nicht lineare Optimierung

Wenn keine Restriktionen

→ Optimum dort wo erste Ableitung 0 ist



Probleme mit Restriktionen in Probleme ohne Restriktionen

Zielfunktion	F(x)
Restriktion	g(x) < 0
neue Zielfunktion	$F'(x) = F(x)+\lambda g(x)$ → neue Variable (λ)

Beispiel

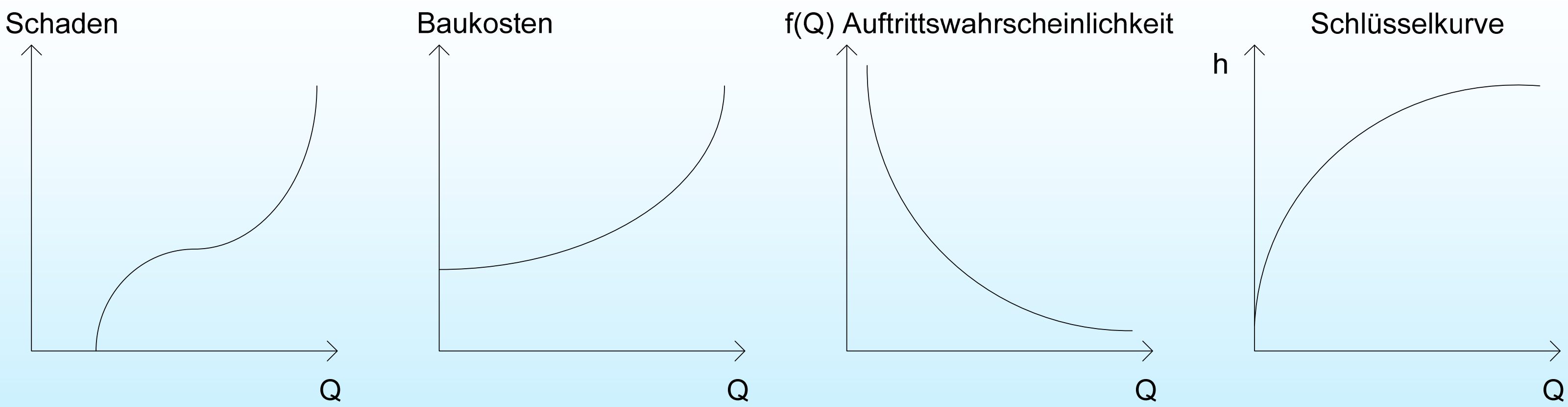
Hochwasserschutz für eine Gemeinde

Gesucht: <u>wirtschaftlich optimale Hochwasserschutz</u>

Bemessungszeit: 25 Jahre

Entscheidungsvariable: Höhe des Dammes

gegeben Funktionen für Beziehung des Abflusses (Q) und



Beispiel

Zielfunktion: maximaler Schutz bei minimalen Kosten

jährlicher Schaden ohne Schutz: $\int_0^{\infty} S(Q)\cdot f(Q)\cdot dQ$

Schaden in 25 Jahren: $\int_0^{\infty} S(Q)\cdot f(Q)\cdot dQ\cdot[\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^{25}}]$

Schaden in 25 Jahren mit HW-Schutz: $c\cdot\int_{Qa}^{\infty} S(Q)\cdot f(Q)\cdot dQ$

(ohne Baukosten)

$$\rightarrow\quad Z=\left\{c\cdot\int_{Q_A}^{\infty} S(Q)\cdot f(Q)\cdot dQ+BK(Q_A)\right\}\Rightarrow\quad \text{Minumum}$$

- nicht lineare Optimierung ohne Restriktionen
- jedoch nicht differenzierbar

Beispiel: Wasseraufteilung

Optimierung mit Restriktionen

Die verfügbare Wassermenge Q ist auf drei Nutzer (Nutzungen) aufzuteilen, wobei ein möglichst hoher Gewinn zu erzielen ist. Der Netto-Nutzen ist aber für jede Nutzung unterschiedlich.

Es gilt:

NBj =aj(1-exp(-bjxj))

Die Mengen xj sind zu ermitteln, wobei gilt:

x1+x2+x3 =Q

Beispiel: Wasseraufteilung

$$Maximiere \quad : \{NB(X)\} = \sum_j a_j (1 - \exp(-b_j x_j))$$

$$wobei \ : \sum_j x_j = Q$$

$$Die\_Methode$$

$$\lambda \_\_ Lagrange \_ Multiplier \ :$$

$$\sum_j x_j - Q = 0$$

$$Maximiere \quad : \{L(X, \lambda)\} = \sum_j a_j (1 - \exp(-b_j x_j)) - \lambda (\sum_j x_j - Q)$$

Beispiel: Wasseraufteilung

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

$$Die\_Lösung$$

$$x_j = \frac{1}{b_j}\left[\ln(\frac{\lambda}{a_j b_j})\right]$$

$$\lambda = \left[e^{-Q}(\Pi(a_j b_j)^{\frac{1}{b_j}}\right]^{\frac{1}{(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3})}}$$

Dynamische Optimierung

Vorgangsweise für mehrstufige Entscheidungsprozesse

Vorteil liegt darin, dass

- hochkomplexe Probleme mit
- großen Anzahl an Variablen
- in eine Reihe von Untersystemen transferiert

und diese Untersysteme rekursiv gelöst werden können

Dynamische Optimierung

Bewirtschaftung eines Speichers
→ typisches dynamisches Optimierungsproblem

Entscheidungsvariable ist Abgabemenge Q

Man unterscheidet zw.

- deterministische dynamische Optimierung
  - eine gegebene Zuflussganglinie verwendet
  - und eine Zielfunktion
- stochastische dynamische Optimierung
  - Erwartungswert und sein Schwankungsbereich statt der fixen Zufallsgröße
- multiobjektive dynamische Optimierung
  - mehrere Ziele (mit gegenläufigen Eigenschaften)
  - Zielgrößen sind ökonomische, ökologische und soziale Aspekte

Dynamische Optimierung

Probleme oft auf mehrere Weisen formuliert

→ Teil der dynam. Optimierung dir effizienteste Lösung zu finden

Haupteigenschaft → fortschreitendes Netzwerk für Lösung

von jeder Stufe

- wird abschließende Stufe
- mit vorgegebenen Anzahl von Stufen

erreicht

Dynamische Optimierung

Wenn Erträge unabhängig und additiv sind, ist

$$f_n(x_n) = \max_{d_n}\left[r_n(x_n, d_n) + f_{n-1}(x_{n-1})\right]$$

eine typische wiederkehrende Beziehung

wobei

x	Zustandsgröße
d	Entscheidungsvariable
r	Ertragsfunktion
n	eine Stufe
x_{n-1}	Formel zur Transformation von Stufe zu Stufe
$f_0(x_0)$	für alle abschließenden Stufen gegeben

Bellman Kriterium

Die rekursive Formulierung beruht auf dem Prinzip, dass man,

- egal in welchem Zustand von welcher Stufe man sich befindet,
- von diesem Zustand und dieser Stufe
- in einer optimalen Art und Weise fortfahren muss

Mathematisch ausgedrückt

$$Z_j\left(s_j\right) = \max_{0 \le x_j \le s_j} \left\{ NB_j\left(x_j\right) + Z_{j+1}\left(s_j - x_j\right) \right\}$$

Bellman Kriterium

Beispiel:

3 Nutzer haben Zugang zu einer Menge Q

Jeder hat andere Nutzen- und Kostenstrukturen

→ **Wie ist die Ressource aufzuteilen?**

Beispiel

Angenommen, dass nur diskrete Mengen 0, 1, 2, 3, 4, 5 möglich

Q=5 ist gegeben

a, b, c, d gegeben

Nutzen: $NB_j = a_j(1 - \exp(-b_j x_j))$

Kosten: $K_j = c_j x_j^{d_j}$

Restriktionen: $\sum x_j = Q \quad x_j > 0$

Zielfunktion: $$Z(Q) = \max_{0 \le x_1 \le Q} \left\{ NB_1(x_1) + \max_{0 \le x_2 \le Q - x_1} \left(NB_2(x_2) + \max_{0 \le x_3 \le Q - x_1 - x_2} \left(NB_3(x_3) \right) \right) \right\}$$

Beispiel

für

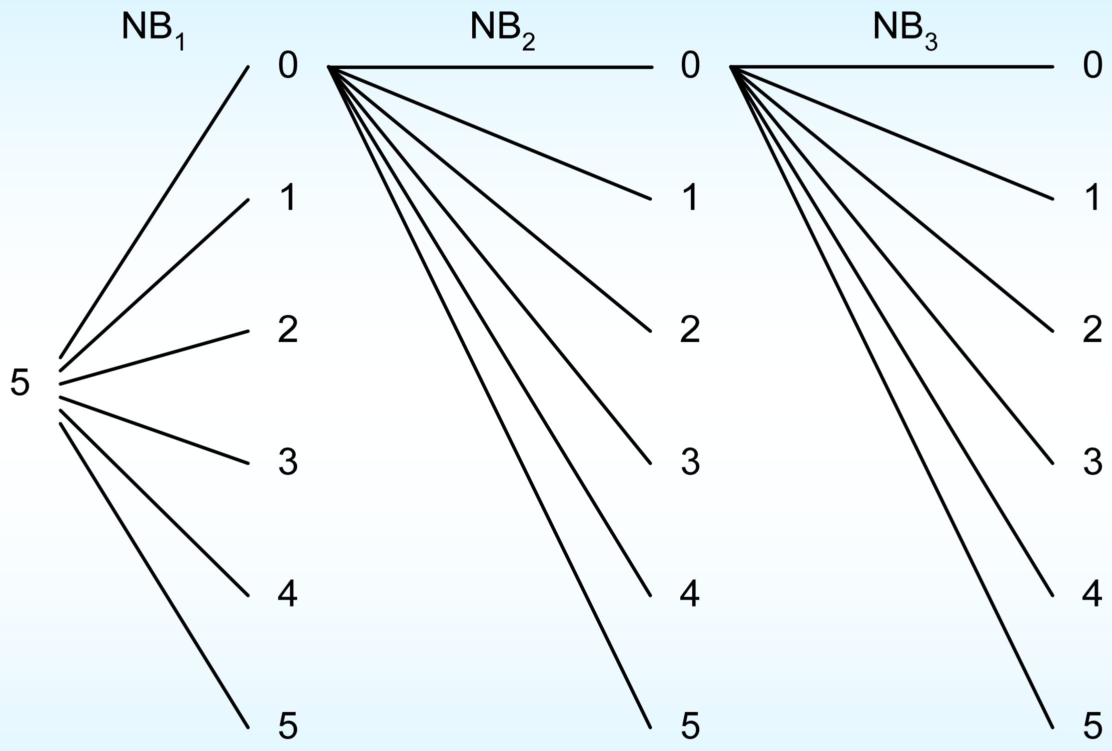
$Q - x_1 = s_2$

$Q - x_1 - x_2 = s_3$

→ allgemeine Darstellung (Ballmann Formulierung):

$$Z_j(s_j) = \max_{0 \le x_j \le s_j} \left\{ NB_j\left(x_j\right) + Z_{j+1}\left(s_j - x_j\right) \right\}$$

Beispiel



Fall x_1=0 → welche Optionen für x_2 und
x_2 =0 → welche Optionen fürx_3

Beispiel

Nutzenmatrix für einzelne Nutzer			
x_j	$NB_1(x_j)$	$NB_2(x_j)$	$NB_3(x_j)$
0	0	0	0
1	-0,5	6,5	-6,9
2	3	10,1	0
3	6,6	10,9	6,3
4	10	9,6	11,5
5	13,1	7	15,6

daraus

- Zuerst optimale Menge für den Benutzer 3
- dann in Abhängigkeit davon die Mengen für die Benutzer 2 und 1

Beispiel

$NB_3(x_3)$									
s_3	x_3	0	1	2	3	4	5	$f_3(s_3)$	x_3*
0		0						0	0
1		0	-6,9					0	0
2		0	-6,9	0				0	0;2
3		0	-6,9	0	6,3			6,3	3
4		0	-6,9	0	6,3	11,5		11,5	4
5		0	-6,9	0	6,3	11,5	15,6	15,6	5

$f_j(x_j)$ jeweils maximaler Wert

x_j* gibt optimale Entscheidung an

$NB_2(x_2+Z_3(s_3))$									
s_2	x_2	0	1	2	3	4	5	$f_2(s_2)$	x_2*
0		0						0	0
1		0	6,5					6,5	1
2		0	6,5	10,1				10,1	2
3		6,3	6,5	10,1	10,9			10,9	3
4		11,5	12,8	10,1	10,9	9,6		12,8	1
5		15,6	18	16,4	10,9	9,6	7	18	1

$NB_2(x_2+Z_3(s_3))$									
Q	x_1	0	1	2	3	4	5	$f_1(Q)$	x_1*
5		18	12,3	13,9	16,7	16,5	13,1	18	0

größten Nutzen bei Kombination

$x_1=0$

$x_2=1$ $\quad \sum NB_j = 18{,}0$

$x_3=4$

Dynamische Optimierung

Fallbeispiel

Dynamische Programmierung bei der Bewirtschaftung von einem Wasserreservoir in Thailand

Bewirtschaftung von einem Wasserreservoir

Pasak Damm

- Mehrzweckdamm in der Lopbuir Provinz in Zentral Thailand
- Einzugsgebiet ist 12.929 km²
- für Bewässerung, Hochwasserschutz und Schifffahrt verwendet

Zielfunktion

→ Verluste durch Wassermangel und Überflutungen zu minimieren

$$f(d_t) = \min_{d_t} \{ Loss(R_t) \}$$

R_t … Abfluss aus dem Speicher

Entscheidungsvariablen

- Speicherinhalt zum Zeitpunkt t+1 (S_{t+1}) oder
- Abfluss zum Zeitpunkt t (R_t) sein

Bewirtschaftung von einem Wasserreservoir

Zustandsvariablen von Art der Programmierung abhängig

- bei der deterministischen dynamischen Programmierung
  →Speicherinhalt zum Zeitpunkt t
- bei der stochastischen dynamischen Programmierung
  →Speicherinhalt S_t und der Zufluss I_t

Eingangsdaten

- der monatliche oder mittlere monatliche Zufluss
- die mittlere monatliche potentielle Verdunstung
- monatliche oder mittlere monatliche Wasserbedarf

Bewirtschaftung von einem Wasserreservoir

Ergebnisse des Modells sind

- das Wasserdefizit an jeder Bewässerungsstelle
- die Verluste durch Wassermangel und Überflutungen
- die optimale Bewirtschaftung

Um dynamische Programmierungsproblem zu lösen

- Speicherinhalt diskretisiert und
- Verlustfunktionen für Überschwemmungen und Wassermangel

müssen aufgestellt werden

Deterministische dynamische Programmierung (DDP)

Annahme → Zufluss ist bekannt (Unsicherheiten ignoriert)

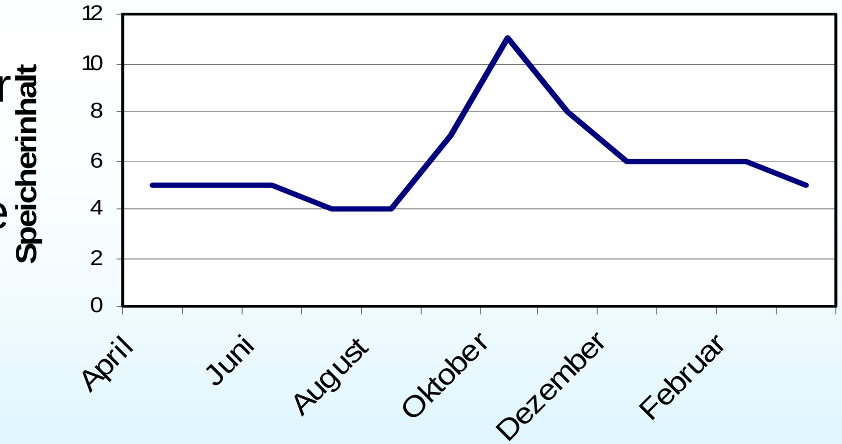
rekursive Gleichung für das Speicherziel

$$f_t^{\,n}(S_t) = \min_{S_{t+1}} \left\{ Loss(R_t) + f_{t+1}^{\,n+1}(S_t) \right\}$$

Ergebnis

- während Monsunzeit wird Wasser gespeichert
- in Trockenperiode Wasserabgabe

→ sinnvolles Ergebnis



Falls Schadensfunktion auch eine Funktion der Dauer der Trockenheit ist →deterministische dynamische Programmierung nicht geeignet

Stochastische dynamische Programmierung (SDP)

probabilistische Verteilung beim Zufluss wird berücksichtigt

Zufluss in Klassen eingeteilt

- gleiche Klassengröße
- Klassen gleicher Wahrscheinlichkeiten

rekursive Funktion

$$f_t^{\,n}(k,i) = \min_{R_t}\left\{ Loss_{kilt}\left(R_{kilt}\right) + \sum_j P_{ij}^t \cdot f_{t+1}^{\,n-1}(l,j) \right\}$$

anfängliches Speichervolumen und Zufluss sind Variablen mit bedingter Wahrscheinlichkeit

Stochastische dynamische Programmierung (SDP)

unter der Annahme

- Speicher am Beginn des Jahres voll und
- Zufluss jeden Monat in der höchsten Klasse

→ Ergebnis **obere Regelkurve**

unter der Annahme

- Zu Beginn des Jahres ist Inhalt minimal
- Zufluss jeden Monat in der niedrigsten Klasse

→ Ergebnis **untere Regelkurve**

- Reservoir wird nie mit mehr oder weniger Inhalt als der beiden Regelkurven bewirtschaftet
- bei Verwendung eines Vorhersagemodell für Zufluss → sehr nützliches Modell

Multi-objektive stochastische dynamische Programmierung (MOSDP)

Studie beachtet zwei unterschiedliche Ziele

- Verluste durch Wassermangel und Überschwemmungen zu minimieren
- Fehlerrisiko zu minimieren

Bewirtschaftung abhängig von

- der Schadensfunktion
- einem zusätzlich hypothetischen Nachteil

Variation des Nachteiles → verschiedene Bewirtschaftungspolitiken

hypothetische Nachteil wurde von 0 bis 10.000 variiert

→ Kombinationen mit Zufluss, Speicherinhalt zu Beginn berechnet

Multi-objektive stochastische dynamische Programmierung (MOSDP)

Erhaltene Bewirtschaftungsregeln

- Wenn der Zufluss und der Speicherinhalt hoch sind → mehr Wasser zu Beginn des Monsuns ablassen. Speicherinhalt erreicht Maximum in Perioden mit Spitzenzufluss
- Wenn der Speicherinhalt hoch ist, der Zufluss aber gering → weniger Wasser zu Beginn der Auffüllperioden ablassen, aber mehr während Perioden mit Spitzenzufluss
- Wenn der Speicherinhalt gering ist, aber der Zufluss hoch → weniger Wasser ablassen um das Reservoir früher aufzufüllen
- Wenn sowohl der Speicherinhalt als auch der Zufluss niedrig → Ergebnis nicht signifikant von dem mit SDP erhaltenen verschieden