Zeitreihenanalyse

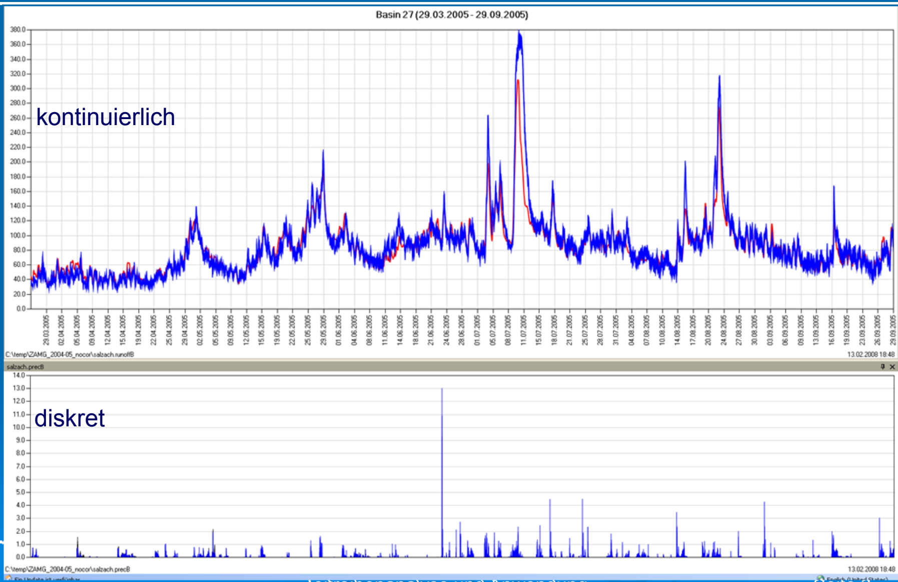
H.P. Nachtnebel

Institut für Wasserwirtschaft, Hydrologie und konstruktiver Wasserbau

Definitionen und Anwendung

- Definition Zeitreihe
  - zeitliche Abfolge von Messwerten, deren Auftreten statistischen Gesetzmäßigkeiten unterliegt
- Anwendung: Zeitreihenanalyse und -synthese
  - Für die Dimensionierung, die Beurteilung der Zuverlässigkeit von Systemen und die Vorhersage werden ZR.A. und Simulationen angewandt
- Art der Messwerte
  - Kontinuierlich
    - Schreiber $X(t)$
  - Diskret
    - Terminwerte $X_i(t_i)$
    - Mittelwerte einer Zeitsp

Darstellung: Ganglinien



Methodik

- Zeitreihenanalyse
  - Zerlegung in wesentliche Anteile und quantitative Beschreibung
    - Trend … $X_T(t)$
      - Beispiel: Rückläufige Abflüsse südlich des Alpenhauptkamms
    - Periode ... $X_P(t)$
      - Beispiel: in Ö die Frühjahrshochwässer
    - Stochastischer Anteil .. $X_R(t)$

$$X(t) = X_T(t) + X_P(T) + X_R(t)$$

Methodik

- Zweck der Zeitreihenanalyse
  - Ermittlung der einzelnen Anteile
  - Parametrisierung des Informationsgehaltes in einer Zeitreihe
- Simulation (Generierung)
  - Dann können Reihen generiert werden, die den gleichen Informationsgehalt (gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit) wie beobachtete Reihe haben

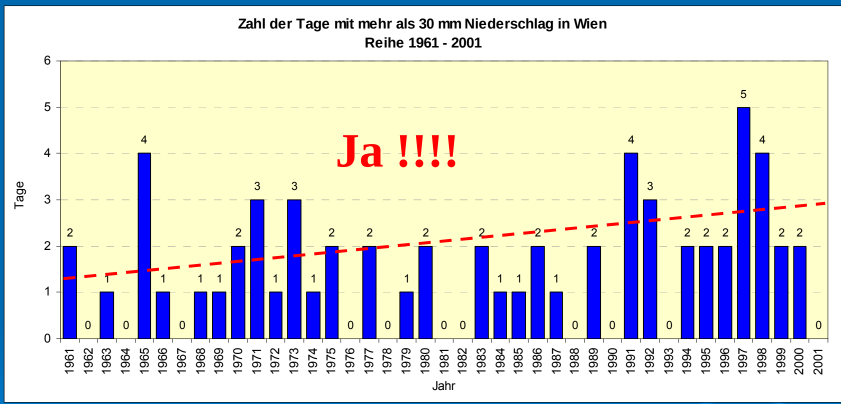
Zeitreihenanalyse und Anwendung Seite 5

Homogenität / Stationärität

- Homogenität
  - Unterteilung einer Reihe in Teilreihen
  - Bestimmen der Parameter
    - Mittelwert
    - Varianz
    - Schiefe
  - Parameter der Teilreihen weichen nicht signifikant voneinander ab ➔ dieselbe Grundgesamtheit ➔ Homogen
- Stationärität
  - Mittelwerte von Teilabschnitten weichen nicht signifikant voneinander ab ➔ Stationärität 1. Ordnung
  - Mittelwerte und Kovarianz von Teilabschnitten weichen nicht signifikant voneinander ab ➔ Stationärität 2. Ordnung

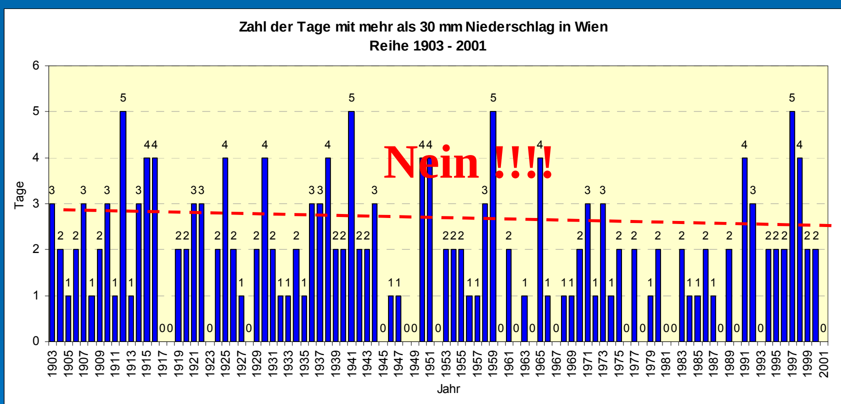
Zeitreihenanalyse und Anwendung Seite 6

Beispiel für Trendanalyse: Extreme Niederschlagsereignisse in Wien



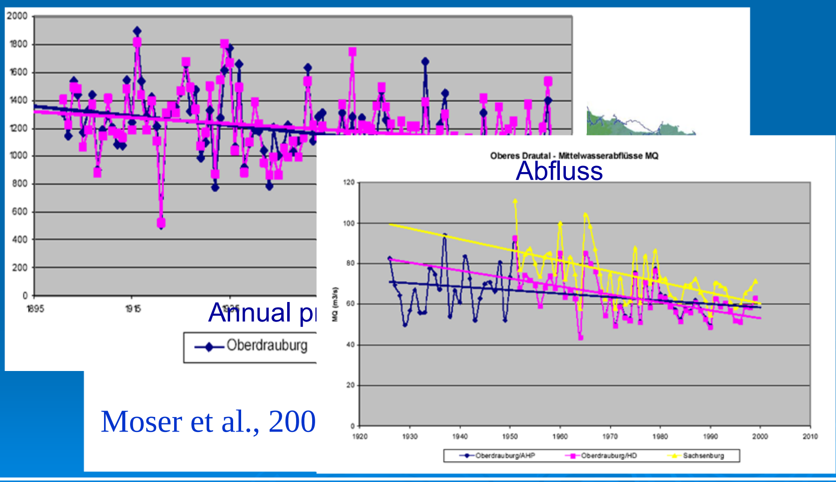
(Rudel, ZAMG 2002)

Beispiel für Trendanalyse: Extreme Niederschlagsereignisse in Wien



(Rudel, ZAMG 2002)

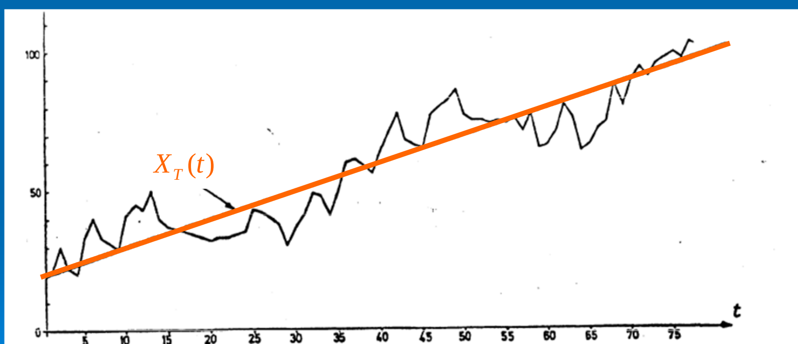
Trends in Niederschlag und Abfluss



Schätzung Trendanteil $X_T(t)$ 1

- Annahme
  - Linearer Trend
    - Schätzung von A und B durch Regressionsrechnung

$$X_T(t) = A + B * t$$

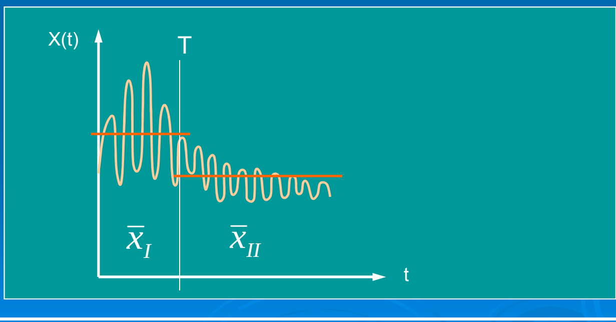


Trendanteil $X_T(t)$ 2

- Annahme
  - Nichtlineares Verhalten

    Beispiel: Nachfragefunktion – zuerst stark ansteigend mit anschließender Sättigung
  - Sprungstellen

$$X_T(t) = A + B * t + C * t^2$$

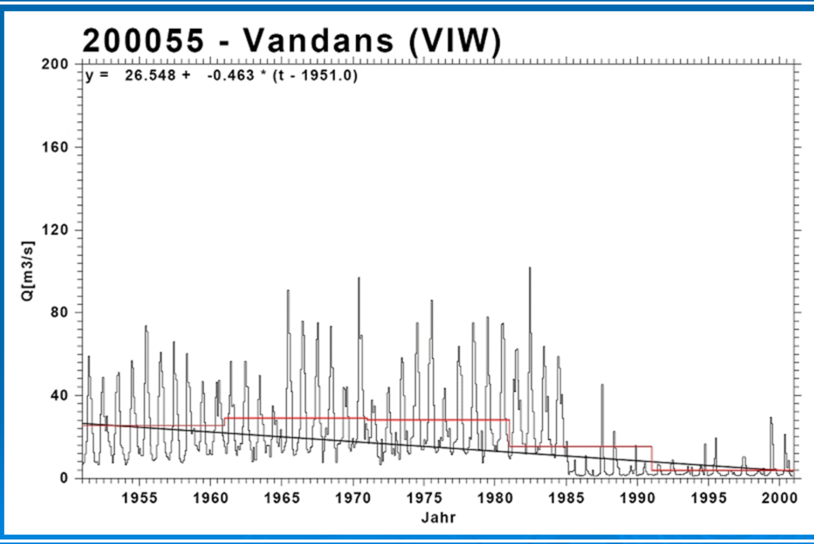


$\overline{x}_I$

$\overline{x}_{II}$

T

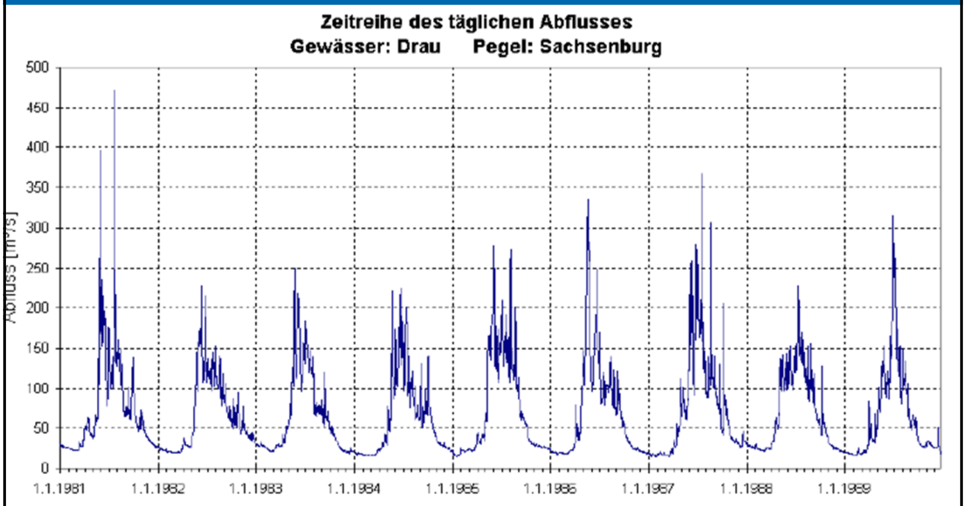
Trends in der Streuung



Trendeliminierung

- $X'(t) = X(t) - X_T(t) = X_P(t) + X_R(t)$
- Oder nicht parametrisch durch numerisches Differenzieren
- $X'(t) = (X(t+1) - X(t))/1$ bei linearem Trend

Periodische Komponente



Fourieranalyse

- Approximation einer beliebigen Funktion durch eine Überlagerung von Sinus- und Cosinus-Funktionen

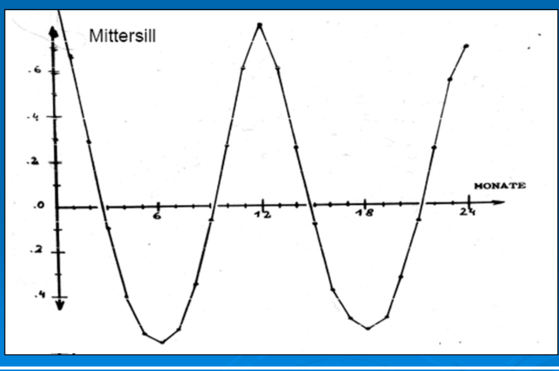
$$X_P(t)=\sum\left(C_j\cos(2\pi * f_j * t)+D_j\sin(2\pi * f_j * t)\right)=$$
$$\sum(C_j\cos j\omega t+D_j\sin j\omega t)$$
$$X_P(t)=\frac{A_0}{2}+\Sigma A_j\sin\left(j\omega t+\varphi_j\right)$$

- Amplitude Cj, Dj bzw. A_j
- Frequenz $f_j=1/T$ $\omega=\frac{2\pi}{T}$
- Phasenwinkel φ_j
- X_t Messwerte

$$C_j=\frac{2}{n}\cdot\sum_{t=0} x_t\cdot\cos j\omega t \qquad D_j=\frac{2}{n}\sum_{t=0} x_t\cdot\sin j\omega t$$

Autokorrelation

- Definition
  - Vergleich der Reihe mit sich selbst
  - Feststellen von Zusammenhängen innerhalb der Reihe

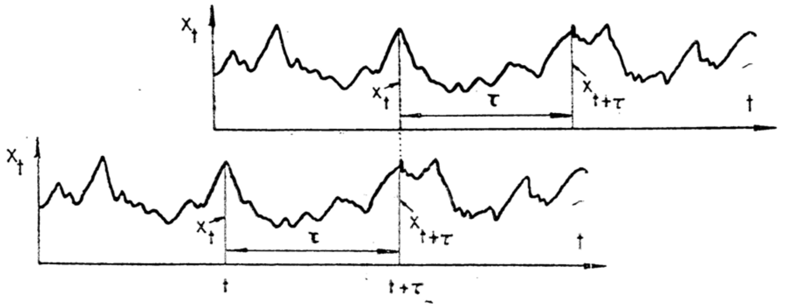


- Anwendung
  - Feststellung eines periodischen Verhaltens
  - zB Jahresgang

Berechnung der Autokorrelation

- Analog zu Kapitel 3 Korrelation und Regression

$$r = \frac{\mathrm{cov}(x(t), x(t+\tau))}{(\mathrm{var}\ \ x(t))^{1/2} \cdot (\mathrm{var}\ \ x(t+\tau))^{1/2}}$$



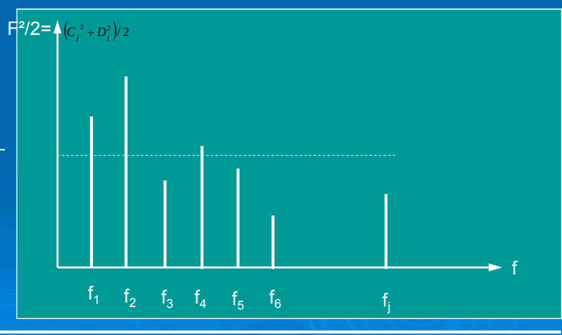
Autokorrelationskoeffizient / Periodogramm

- Autokorrelationskoeffizient:
  - Korrelationskoeffizient als Funktion der Verschiebung τ
  - Kann auch direkt aus den Fourierkomponenten berechnet werden

$$X_P(t) = \sum \left(C_j \cos(2\pi * f_j * t) + D_j \sin(2\pi * f_j * t)\right)$$

$$r_\tau = \frac{\sum_{i=1} \left(C_j^{2} + D_j^2\right)\cos(2\pi * f_j * \tau)}{\sum_{j=1} \left(C_j^2 + D_j^2\right)}$$

- Periodogramm
  - Ablesen der Amplituden-quadrate bei den Frequenzen
  - Strichlierte Linie = Signifikanz-niveau



Stochastischer Anteil

$$X''(t) = X(t) - X_T(t) - X_P(t) = X_R(t)$$

- $X_R(t)$ … Random = zufällige Größe

- Ursache
  - zumeist durch kurzfristige, zufällige Witterungserscheinungen
- Überlegung
  - Zeitreihenwert ist vom vorhergehenden Wert abhängig
  - plus einer zufälligen Schwankung

$$X_R(t) = r_1 * X_R(t-1) + \varepsilon(t)$$

- r_1 … Autokorrelationskoeffizient
- $\varepsilon(t)$ … Zufallsanteil

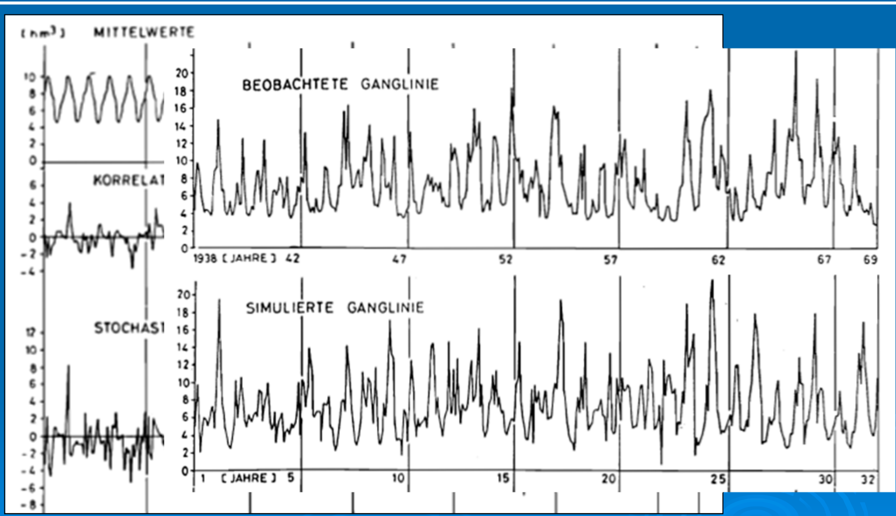
Zeitreihenanalyse und Anwendung Seite 19

Zeitreihensynthese

- Anwendung auf Zeitreihensynthese
  - Bei gegebenen Parametern kann eine Zeitreihe generiert werden
  - Parameter
    - Trendanteil A,B
    - Jahresgang C,D
    - Stochastischer Anteil r_1, σ_ε
  - Die generierte Zeitreihe hat die gleiche statistische Wahrscheinlichkeit wie die beobachtete Reihe, aber eine andere zeitliche Abfolge
  - Trockenjahre / Nassjahre
  - Man kann damit Wasserwirtschaftssysteme testen
    - Versorgungsanlagen
    - Speicher
    - Hochwasserrückhaltebecken …

Zeitreihenanalyse und Anwendung Seite 20

Beispiel Simulation Zeitreihe



Anwendung der Synthese

- Simulation für Bemessungszwecke
- Simulation zur Prüfung der Funktionsweise von Bauwerken
- Simulation liefert keine neue Information, aber generiert Reihen, die gleich wahrscheinlich sind wie beobachtete Reihe
- Es können daher Nassjahre, Trockenjahre, Extremereignisse etc. in der Simulation auftreten

Zusammenfassung Zeitreihenanalyse

- Definitionen
  - Zeitreihe und ihre Anwendung in der Hydrologie
  - Art der Messwerte
  - Grafische Darstellung der Zeitreihe = Ganglinie
- Zeitreihenanalyse
  - Wesentliche Anteile
    - Trend
      - Linear
      - Nichtlinear
      - Sprungstellen
    - Periode
      - Fourieranalyse
      - Autokorrelation - Periodogramm
    - Stochastischer Anteil
- Zeitreihensynthese
  - Beispiel

Zeitreihenanalyse und Anwendung Seite 23